Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 3, с. 61–85. © ФИЦ ИВТ, 2021 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 3, pp. 61–85. © FRC ICT, 2021 eISSN 2313-691X

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.005

Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений

И. А. Шарая, С. П. Шарый

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Шарый Сергей Петрович, e-mail: shary@ict.nsc.ru

Поступила 4 марта 2020 г., доработана 18 марта 2021 г., принята в печать 25 марта 2021 г.

В работе рассматриваются интервальные линейные включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ в полной интервальной арифметике Каухера. Вводится количественная мера выполнения этого включения, названная "резервом включения", исследуются ее свойства и приложения. Показано, что резерв включения оказывается полезным инструментом при изучении AE-решений и кванторных решений интервальных линейных систем уравнений и неравенств. В частности, использование резерва включения помогает при определении положения точки относительно множества решений, при исследовании пустоты множества решений или его внутренности и т. п.

Ключевые слова: интервальные линейные системы, AE-решения, кванторные решения, множество решений, характеристическое включение, резерв включения, распознающий функционал.

Цитирование: Шарая И.А., Шарый С.П. Резерв характеристического включения для интервальных линейных систем отношений. Вычислительные технологии. 2021; 26(3):61–85. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.005.

Введение

В настоящей работе рассматриваются интервальные линейные включения в так называемой полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$. Она является алгебраическим и порядковым пополнением классической интервальной арифметики $\mathbb{IR}$, которое получается в результате добавления ко множеству традиционных интервалов вещественной оси $[\underline{u}, \overline{u}]$, $\underline{u}, \overline{u} \in \mathbb{R}$, $\underline{u} \le \overline{u}$, называемых *правильными интервалами*, некоторых идеальных элементов $[\underline{u}, \overline{u}]$, $\underline{u} > \overline{u}$, называемых *неправильными интервалами*. Упорядочение интервалов вещественной оси согласно теоретико-множественному отношению включения, а также арифметические операции — сложение, вычитание, умножение и деление — естественно распространяются на все расширенное множество получившихся "интервалов", а алгебраические и порядковые свойства интервальной арифметики при этом существенно улучшаются.

Для интервалов $[\underline{u}, \overline{u}]$ и $[\underline{v}, \overline{v}]$ из $\mathbb{KR}$ мы полагаем

$$[\underline{u}, \overline{u}] \subseteq [\underline{v}, \overline{v}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{u} \ge \underline{v} \quad \text{и} \quad \overline{u} \le \overline{v},$$

так что, к примеру, $[4, 1] \subseteq [2, 3]$. Относительно такого "порядка по включению" расширенная интервальная арифметика $\mathbb{KR}$ становится так называемой решеткой, т. е.

частично упорядоченным множеством, в котором можно брать операции минимума и максимума от любых конечных семейств элементов. Классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$ таким свойством не обладает.

Итак, далее будем обозначать $\mathbb{KR} = \{[\underline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{v}}] \mid \underline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}\}$ — множество всех интервалов Каухера для вещественной оси $\mathbb{R}$, а $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}} = \{[\underline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{v}}] \mid \underline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{v}} \in \overline{\mathbb{R}}\}$ — множество интервалов Каухера для расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (см. [1–3]). В целом, используемая в работе система обозначений следует неформальному международному стандарту [4].

Объектом исследования являются интервальные линейные включения вида

$$\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ — $m \times n$-матрица с элементами из $\mathbb{KR}$, $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_i)$ — интервальный m-вектор, образованный расширенными интервалами из $\mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}$. Мы вводим и исследуем количественную меру выполнения включения (1), которую называем “резервом включения”. Затем дается ответ на вопрос “зачем нужен этот резерв включения?”.

Множеством решений включения (1) будем называть множество

$$\varXi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \underline{\textstyle\sum_{j=1}^n \boldsymbol{c}_{ij} x_j} \geq \underline{\boldsymbol{d}}_i,\ \overline{\textstyle\sum_{j=1}^n \boldsymbol{c}_{ij} x_j} \leq \overline{\boldsymbol{d}}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\right\},$$

т. е. множество всех векторов x, для которых включение $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ истинно. Включение $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ в арифметике Каухера и его решения оказываются полезными для разнообразных целей. Во-первых, они являются инструментом для единообразного рассмотрения так называемых AE-решений и кванторных решений интервальных линейных систем отношений — уравнений, неравенств и их смесей. В следующем разделе мы кратко напоминаем читателю соответствующие понятия и основные результаты (подробности можно увидеть в работах [3, 5–8]).

1. Кванторные решения и AE-решения

Интервалы вещественной оси $\mathbb{R}$ — это множества точек из $\mathbb{R}$, которые мы обычно рассматриваем как удобные в описании и использовании множества возможных значений параметров в различных задачах. Как правило, можно считать, что определено какое-либо свойство $P(v)$, которое может выполняться или же не выполняться для точек v из заданного интервала $\boldsymbol{v}$.

Например, свойство $P(v)$ может иметь вид “является решением данного уравнения при значении параметра v”, “является решением рассматриваемой задачи при v из $\boldsymbol{v}$”, и т. д. При этом возможны следующие принципиально различные ситуации:

1) либо свойство $P(v)$ выполняется для *всех* значений v из данного интервала $\boldsymbol{v}$,
2) либо свойство $P(v)$ выполняется лишь для *некоторых* значений v из данного интервала $\boldsymbol{v}$, не обязательно всех, или даже только для одного v из $\boldsymbol{v}$.

Описанное выше различие может быть формально выражено логическими кванторами, т. е. специальными логическими операциями. Более точно, нам понадобятся квантор всеобщности "$\forall$", означающий "для всех", и квантор существования "$\exists$", означающий "существует" (см. [9]):

$$
\begin{array}{l}
\text{– в первом случае мы пишем } \text{“}(\forall v \in \boldsymbol{v})\, P(v)\text{”} \\
\qquad \text{и говорим об } \textit{интервальной A-неопределенности}, \\
\text{– во втором случае мы пишем } \text{“}(\exists v \in \boldsymbol{v})\, P(v)\text{”} \\
\qquad \text{и говорим об } \textit{интервальной E-неопределенности.}
\end{array}
\tag{2}
$$

Таким образом, при работе с интервалами и постановке разнообразных интервальных задач следует различать два указанных выше типа интервальной неопределенности. Кванторные решения и AE-решения интервальных систем отношений — это решения, для которых аккуратно учитываются существование двух типов интервальной неопределенности и различие между A-типом и E-типом неопределенности в интервальных параметрах задачи [3, 5–8].

Рассмотрим интервальную систему отношений

$$F(\boldsymbol{a}, x)\ \sigma\ \boldsymbol{b}, \tag{3}$$

где $F = (F_1(a,x), F_2(a,x), \dots, F_m(a,x))^\top$ — вектор-функция с компонентами $F_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\boldsymbol{a} \in \mathbb{IR}^l$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальные векторы возможных значений параметров; $x \in \mathbb{R}^n$ — n-вектор неизвестных переменных; σ — m-вектор, составленный из бинарных отношений "$=$", "$\leq$" или "$\geq$".

Таким образом, (3) может быть системой уравнений, системой неравенств или же "смесью" уравнений и неравенств. Из наших рассуждений о типах интервальной неопределенности вытекает, что свойство, задающее "решения" системы (3), в самом общем виде должно выглядеть следующим образом:

$$(Q_1 v_{\pi_1} \in \boldsymbol{v}_{\pi_1})(Q_2 v_{\pi_2} \in \boldsymbol{v}_{\pi_2}) \cdots (Q_{l+m} v_{\pi_{l+m}} \in \boldsymbol{v}_{\pi_{l+m}})\big(\, F(a,x)\,\sigma\, b\,\big), \tag{4}$$

где $Q_1, Q_2, \dots, Q_{l+m}$ — логические кванторы "$\forall$" или "$\exists$"; $(v_1, v_2, \dots, v_{l+m}) := (a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{l+m}$ — агрегированный (составной) вектор параметров системы; $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{l+m}) := (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m) \in \mathbb{IR}^{l+m}$ — агрегированный (составной) вектор интервалов их значений; $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{l+m})$ — некоторая перестановка положительных целых чисел 1, 2, ..., $l+m$.

Содержательный смысл конструкции, которую представляет формула (4), чрезвычайно прост и естественен: мы комбинируем интервальные параметры системы отношений с разными логическими кванторами и затем получившиеся выражения вида $(\forall v_{\pi_i} \in \boldsymbol{v}_{\pi_i})$ и $(\exists v_{\pi_i} \in \boldsymbol{v}_{\pi_i})$ комбинируем между собой в разном порядке (коль скоро разные логические кванторы не перестановочны друг с другом). Будем называть логическую формулу (4) *выделяющим предикатом* для решений системы (3), так как она задает свойство, выделяющее решения системы из всего универсума $\mathbb{R}^n$ в соответствии с так называемой аксиомой выделения теории множеств (см., к примеру, [10]).

Вектор $\tilde{x}$ называется *кванторным решением* интервальной системы отношений вида $F(\boldsymbol{a}, x)\sigma\boldsymbol{b}$, если выделяющий предикат (4) становится истинен в результате присваивания значения $\tilde{x}$ переменной x. Это очень общее понятие, которое охватывает огромное разнообразие конкретных видов решений для интервальных систем (3). Полное количество таких видов решений, как нетрудно понять, существенно превышает 2^{l+m}. Чтобы не потеряться в этой огромной общности, имеет смысл как-то ограничить и структурировать ее, зафиксировав более конкретный вид выделяющего предиката, с помощью которого определяются те или иные кванторные решения.

Кванторные решения интервальных систем отношений, для которых выделяющий предикат имеет так называемую AE-форму, где все вхождения квантора всеобщности "$\forall$" предшествуют вхождениям квантора существования "$\exists$", называются AE-*решениями*. Эти решения являются, таким образом, частным случаем кванторных решений, которые получаются фиксацией некоторого специального порядка логических кванторов в логической формуле (выделяющем предикате), которая определяет решения.

AE-решения интервальных уравнений и неравенств сделались областью интенсивных исследований в течение последней четверти века, прошедшей с момента их введения в работах [5, 6]. Они имеют ясную практическую интерпретацию как решения одношаговых процессов принятия решений в условиях интервальной неопределенности, когда требуется найти компромисс между внешними возмущениями (они выражаются интервальными параметрами с A-неопределенностью) и управляющими воздействиями (они выражаются интервальными параметрами с E-неопределенностью) [3, 7]. Обобщения понятия AE-решений проникли в теорию нечетких множеств и ее приложения [11]. Интересующийся читатель может найти дальнейшие результаты по AE-решениям линейных и нелинейных систем уравнений, например, в работах [12–17] и др.

Основной объект рассмотрения нашей статьи — включение $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$. Оно возникает в связи с кванторными решениями и AE-решениями интервальных систем линейных алгебраических отношений вида

$$\boldsymbol{A}x \;\sigma\; \boldsymbol{b}, \tag{5}$$

где $\sigma \in \{=, \leq, \geq\}^m$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i) \in \mathbb{IR}^m$. Кратко напомним соответствующие результаты из работ [5–8].

Пусть $m\times n$-кванторная матрица $\mathcal{A} \in \{\forall, \exists\}^{m\times n}$ и m-кванторный вектор $\beta \in \{\forall, \exists\}^m$ задают типы неопределенности отдельных интервальных параметров $\boldsymbol{a}_{ij}$, $\boldsymbol{b}_i$ в матрице и правой части интервальной системы отношений (5). Введем вспомогательные интервальные матрицы $\boldsymbol{A}^\forall = (\boldsymbol{a}^\forall_{ij})$, $\boldsymbol{A}^\exists = (\boldsymbol{a}^\exists_{ij})$ и векторы $\boldsymbol{b}^\forall = (\boldsymbol{b}^\forall_i)$, $\boldsymbol{b}^\exists = (\boldsymbol{b}^\exists_i)$, имеющие те же размеры, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно, и образованные элементами:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^\forall_{ij} &:= \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} &\qquad \boldsymbol{b}^\forall_i &:= \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \exists, \end{cases} \\
\boldsymbol{a}^\exists_{ij} &:= \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} &\qquad \boldsymbol{b}^\exists_i &:= \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \forall. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда множество AE-решений для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ можно также определить как множество

$$\varXi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \bigl\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A' \in \boldsymbol{A}^\forall)(\forall b' \in \boldsymbol{b}^\forall)(\exists A'' \in \boldsymbol{A}^\exists)(\exists b'' \in \boldsymbol{b}^\exists)\,((A' + A'')x = b' + b'') \bigr\}.$$

Кроме того, справедлива следующая эквивалентная характеризация AE-решений в терминах полной интервальной арифметики Каухера [3, 5–8]:

$$x \in \varXi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \quad\Longleftrightarrow\quad \bigl(\boldsymbol{A}^\forall + \operatorname{dual} \boldsymbol{A}^\exists\bigr)\, x \;\subseteq\; \operatorname{dual} \boldsymbol{b}^\forall + \boldsymbol{b}^\exists, \tag{7}$$

где “dual” означает оператор дуализации dual : $\mathbb{KR} \to \mathbb{KR}$, меняющий местами концы интервала, т. е. такой, что dual$\,[\,\underline{z}, \overline{z}\,] = [\,\overline{z}, \underline{z}\,]$. Включение в правой части эквивалентности (7), которое совпадает по форме с (1), называется *характеристическим включением* для AE-решений, задаваемых распределением неопределенностей (6) по интервальным элементам системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Оно позволяет кратко и емко записывать условие принадлежности точки множеству AE-решений интервальной линейной системы уравнений (см. пример в разд. 2).

Следующий важный частный случай — это кванторные решения интервальных систем линейных неравенств

$$\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b} \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$. Замечательный факт, касающийся интервальных систем линейных неравенств, состоит в том, что порядок логических кванторов в выделяющем предикате их множеств решений не играет роли [8]. Поэтому общие кванторные решения интервальных систем линейных неравенств совпадают с их AE-решениями. Более точно, если $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — кванторный префикс (приставка) выделяющего предиката, составленный из кванторных членов, которые соответствуют индивидуальным интервальным параметрам, то

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(\boldsymbol{A}x \geq \boldsymbol{b}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(\boldsymbol{A}^{\forall} + \operatorname{dual} \boldsymbol{A}^{\exists}\big)\, x \subseteq \big[\,\overline{\boldsymbol{b}}^{\forall} + \underline{\boldsymbol{b}}^{\exists}, +\infty\,\big], \\ Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(\boldsymbol{A}^{\forall} + \operatorname{dual} \boldsymbol{A}^{\exists}\big)\, x \subseteq \big[\,-\infty, \underline{\boldsymbol{b}}^{\forall} + \overline{\boldsymbol{b}}^{\exists}\,\big]. \end{aligned}$$

Подробности можно увидеть в работе [8].

В качестве частного случая включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ стоит упомянуть некоторые специальные кванторные решения для интервальных линейных систем отношений вида $\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}$. Пусть выделяющий предикат множества решений таков, что для интервальных параметров из отношений равенства все вхождения квантора всеобщности “$\forall$” предшествуют вхождениям квантора существования “$\exists$”. Если $Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ — это кванторный префикс рассматриваемого выделяющего предиката, то имеет место следующая эквивалентность [8]:

$$Q^{\sigma}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(\boldsymbol{A}x\,\sigma\,\boldsymbol{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\,\boldsymbol{A}^{\forall} + \operatorname{dual} \boldsymbol{A}^{\exists}\,\big)\, x \subseteq \operatorname{dual} \boldsymbol{b}^{\forall} + \boldsymbol{b}^{\exists} + \boldsymbol{w},$$

где интервальный m-вектор $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_i)$ определяется как

$$\boldsymbol{w}_i := \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_i \text{ есть “}=\text{”}, \\ [0, \infty], & \text{если } \sigma_i \text{ есть “}\geq\text{”}, \\ [-\infty, 0], & \text{если } \sigma_i \text{ есть “}\leq\text{”}. \end{cases}$$

Подводя итог, можно сказать, что рассмотрение включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ в полной интервальной арифметике Каухера позволяет изучать все различные частные случаи кванторных решений интервальных систем линейных неравенств и AE-решений интервальных систем линейных отношений

- ► одновременно и единообразным способом,
- ► с помощью интервальных методов.

2. Определение и основные свойства резерва

Пусть даны два интервала $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \subset \mathbb{R}$, причем $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$. Как можно количественно охарактеризовать "запас включения" интервала $\boldsymbol{a}$ в интервал $\boldsymbol{b}$, т. е. то, "насколько сильно" $\boldsymbol{a}$ включен в $\boldsymbol{b}$? Один из возможных естественных способов сделать это состоит в следующем. Равномерно "раздуем" меньший интервал $\boldsymbol{a}$ относительно его середины на величину $t \in \mathbb{R}$, т. е. построим интервал $\boldsymbol{a} + [-t, t]$, и отследим момент, когда включение получающегося интервала в $\boldsymbol{b}$ нарушится. Чем больше нужно будет взять значение t для нарушения включения $\boldsymbol{a} + [-t, t] \subseteq \boldsymbol{b}$, тем бо́льшим является резерв (запас) включения интервала $\boldsymbol{a}$ в интервал $\boldsymbol{b}$.

Основываясь на сформулированных выше идеях, введем

Определение 1. *Резервом интервального линейного включения* $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ *(или просто резервом, если включение зафиксировано) в точке* $x \in \mathbb{R}^n$ *мы называем наибольшее число* $\mathrm{Rsv} \in \mathbb{R}$*, такое что*

$$\boldsymbol{C}x + [-\mathrm{Rsv}\,, \mathrm{Rsv}\,] \cdot (1, 1, \ldots, 1)^\top \subseteq \boldsymbol{d}\,.$$

Отметим, что если $\mathrm{Rsv} < 0$, то $[-\mathrm{Rsv}\,, \mathrm{Rsv}\,]$ — неправильный интервал, так что все арифметические операции и отношения в данном определении рассматриваются в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$ (см. детали в [1–3]). Кроме того, элементы матрицы $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ и компоненты вектора $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_i)$ также могут быть обобщенными интервалами из $\mathbb{KR}$.

Смысл понятия резерва, как нам кажется, вполне очевиден из его определения: если рассматриваемое включение истинно, то его "резерв" — это наибольший радиус интервала, на который можно "раздуть" левую часть включения (или сузить правую), чтобы оно еще оставалось истинным. Если же включение неверно, то мы всегда можем добиться его выполнения, сужая левую часть, хотя для этого может понадобиться перейти к неправильным интервалам. В этом случае резерв превращается в "дефицит включения" и показывает, насколько нужно сузить левую часть, чтобы она стала включаться в правую.

Выведем аналитическое представление для резерва Rsv. Из определения отношения включения интервалов в арифметиках $\mathbb{IR}$ и $\mathbb{KR}$ следует, что $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ равносильно системе линейных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{(\boldsymbol{C}x)_i} \geq \underline{\boldsymbol{d}}_i, \\ \overline{(\boldsymbol{C}x)_i} \leq \overline{\boldsymbol{d}}_i, \end{array} \right. \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Используя матрично-векторные обозначения в духе MATLAB'а, когда весь диапазон значений индекса обозначается посредством двоеточия ":", а $\boldsymbol{C}_{i:}$ — это i-я строка матрицы $\boldsymbol{C}$, можем придать выписанной системе следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{C}_{i:}x} \geq \underline{\boldsymbol{d}}_i, \\ \overline{\boldsymbol{C}_{i:}x} \leq \overline{\boldsymbol{d}}_i, \end{array} \right. \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

По определению резерв включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ — это такое максимальное вещественное число Rsv, для которого выполнены неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{C}_{i:}x} - \mathrm{Rsv} \geq \underline{\boldsymbol{d}}_i, \\ \overline{\boldsymbol{C}_{i:}x} + \mathrm{Rsv} \leq \overline{\boldsymbol{d}}_i, \end{array} \right. \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Иными словами, резерв — это наибольшее число Rsv, удовлетворяющее

$$\begin{cases} \mathrm{Rsv} \ \le \ \underline{\boldsymbol{C}_{i:}x} - \underline{\boldsymbol{d}}_i, \\ \mathrm{Rsv} \ \le \ -\overline{\boldsymbol{C}_{i:}x} + \overline{\boldsymbol{d}}_i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Rsv} &= \min_{1\le i\le m} \min\left\{ \underline{\boldsymbol{C}_{i:}x} - \underline{\boldsymbol{d}}_i, \ -\overline{\boldsymbol{C}_{i:}x} + \overline{\boldsymbol{d}}_i \right\} = \\ &= \min_{1\le i\le m} \min\left\{ \underline{\boldsymbol{C}}_{i:}x^+ - \overline{\boldsymbol{C}}_{i:}x^- - \underline{\boldsymbol{d}}_i, \ -\overline{\boldsymbol{C}}_{i:}x^+ + \underline{\boldsymbol{C}}_{i:}x^- + \overline{\boldsymbol{d}}_i \right\} = \\ &= \min_{1\le i\le m} \min\left\{ \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij}^{-\operatorname{sgn} x_j} x_j - \underline{\boldsymbol{d}}_i, \ -\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij}^{\operatorname{sgn} x_j} x_j + \overline{\boldsymbol{d}}_i \right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $x^+, x^- \in \mathbb{R}^n_+$, $x^+ = \max\{0, x\}$, $x^- = \max\{0, -x\}$ — это положительная и отрицательная части вектора x соответственно, и для каждого i определяем

$$\boldsymbol{c}_{ij}^{-\operatorname{sgn} x_j} = \begin{cases} \underline{\boldsymbol{c}}_{ij}, & \text{если } x_j \ge 0, \\ \overline{\boldsymbol{c}}_{ij}, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \boldsymbol{c}_{ij}^{\operatorname{sgn} x_j} = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{c}}_{ij}, & \text{если } x_j \ge 0, \\ \underline{\boldsymbol{c}}_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для фиксированных $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$ можем рассматривать резерв как функцию лишь от точки x, т. е. как функцию $\mathrm{Rsv}\,(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда ее значения характеризуют свойства точки x по отношению к интервальному включению $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ и интервальной системе линейных отношений, для которой это включение является характеристическим (см. разд. 1). Мы будем употреблять по отношению к этой функции $\mathrm{Rsv}\,(x)$ термин "функционал", означающий отображение, заданное на произвольном множестве и принимающее своими значениями числа.

Из (9) следует, что функционал $\mathrm{Rsv}\,(x)$ определен на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Кроме того, он очевидно является непрерывным (и даже непрерывным по Липшицу) как функция своих аргументов. Это следует из того, что выражение для Rsv составлено из непрерывных функций и операций.

Напомним, что множество точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, имеющих определенный знак каждой своей координаты, которое дополнено своей границей, называется *ортантом* пространства $\mathbb{R}^n$. Ортанты также называют *координатными углами* пространства.

Предложение 1. *Функционал* $\mathrm{Rsv}\,(x)$ *является вогнутым в каждом ортанте* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. В каждом фиксированном ортанте пространства $\mathbb{R}^n$ значения $\boldsymbol{c}_{ij}^{-\operatorname{sgn} x_j}$ и $\boldsymbol{c}_{ij}^{\operatorname{sgn} x_j}$ постоянны для всех i и j. Следовательно, из последней формулы цепочки (9) можно заключить, что функционал $\mathrm{Rsv}\,(x)$ является минимумом $2m$ линейных функций вида

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij}^{-\operatorname{sgn} x_j} x_j - \underline{\boldsymbol{d}}_i \right) \ \text{ и } \ \left(-\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij}^{\operatorname{sgn} x_j} x_j + \overline{\boldsymbol{d}}_i \right), \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

в пределах любого фиксированного ортанта. □

Предложение 2. *Функционал* $\mathrm{Rsv}\,(x)$ *является кусочно-линейным.*

Доказательство практически очевидно из представления (9) и доказательства предыдущего предложения. □

Как следует из разд. 1, резерв включения (1) является очень общей конструкцией, охватывающей многие частные случаи интервальных систем линейных отношений и их различные множества решений. Тем не менее, некоторые специальные случаи резерва давно и успешно применялись в предшествующих работах по интервальным линейным системам уравнений, хотя и под именем “распознающие функционалы”. Этим термином называются отображения, которые распознают принадлежность точки заданному множеству решений интервального уравнения и т. п. своими значениями, их знаком и пр. С их помощью изучение этих множеств сводится к исследованию различных свойств функций.

Исторически самым первым распознающим функционалом был $\mathrm{Tol}\,(x)$, построенный для решения задачи распознавания допускового множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений [18, 19]. Напомним, что для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ *допусковое множество решений* определяется как множество

$$\Xi_{\mathrm{tol}} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\}, \tag{10}$$

образованное всеми такими векторами x, что произведение Ax попадает в пределы $\boldsymbol{b}$ для любых возможных $A \in \boldsymbol{A}$. Функционал

$$\mathrm{Tol}(x) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \big\{\, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \big|\, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{A}_{i:}x \,\big|\, \big\} \tag{11}$$

— это резерв соответствующего характеристического включения $\boldsymbol{A}x \subseteq \boldsymbol{b}$. Дальнейшие подробности и историю задачи можно увидеть в работах [18, 19] и в книге [3].

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ хорошо известно *объединенное множество решений*, определяемое как множество

$$\Xi_{\mathrm{uni}} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\}, \tag{12}$$

которое объединяет всевозможные решения точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$. Таким образом, его выделяющий предикат — это формула $(\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)$, и соответствующее характеристическое включение есть $(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A})x \subseteq \boldsymbol{b}$. Его резерв, как функция точки x, совпадает с известным распознающим функционалом

$$\mathrm{Uss}(x) \;=\; \min_{1\leq i\leq m} \big\{\, \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i + (\mathrm{rad}\,\boldsymbol{A}_{i:})\,|x| - \big|\, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - (\mathrm{mid}\,\boldsymbol{A}_{i:})\,x \,\big|\, \big\},$$

где $|x|$ — вектор модулей компонент x. Функционал Uss был введен в работах [20, 21] (см. также [22]). Стоит отметить, что существуют и другие конструкции распознающих функционалов, основанные на идеях, отличных от резерва характеристического включения [20, 23, 24].

Пример 1. Для объединенного множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

функционал $\mathrm{Rsv}\,(x)$ (т. е., функционал Uss, определенный посредством (12)), имеет график, изображенный на рис. 1 [20, 21].

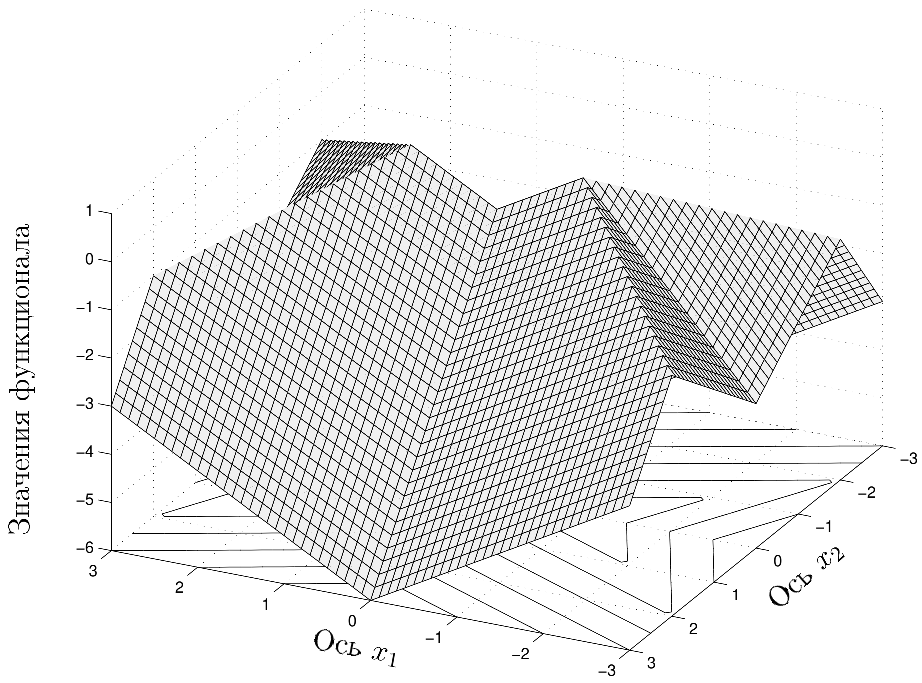

Рис. 1. График резерва (распознающего функционала Uss) для системы (13)
Fig. 1. Graph of the reserve (recognizing functional Uss) for system (13)

Для каких целей можно использовать резерв характеристического включения? Мы покажем далее, что с помощью резерва, как функции точки x, можно получить обширную информацию, касающуюся различных свойств включения, таких как:

— положения точки относительно множества решений;

— пустоты или непустоты множества решений Ξ;

— пустоты или непустоты внутренности множества решений Ξ;

— "наилучших точек" включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$.

3. Свойства множества решений

Прежде чем сформулировать основные результаты нашей статьи, необходимо напомнить некоторые геометрические и топологические свойства множества решений Ξ для интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$.

Пересечение множества решений Ξ с каждым ортантом пространства $\mathbb{R}^n$ является выпуклым полиэдральным множеством. Этот факт хорошо известен для частных типов множеств решений интервальных систем линейных отношений (см., к примеру, [3, 6, 7, 18, 19, 25]), но будет не лишним дать набросок его обоснования для общего включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$.

Принадлежность вектора y ортанту $\mathbb{R}^n$ определяется фиксацией знаков его компонент y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, для любой интервальной $m \times n$-матрицы $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ компоненты произведения $\boldsymbol{C}y = ((\boldsymbol{C}y)_1, (\boldsymbol{C}y)_2, \ldots, (\boldsymbol{C}y)_m)^\top$ могут быть представлены в виде

$$(\boldsymbol{C}y)_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij} y_j = \left[\sum_{j=1}^{n} \underline{\boldsymbol{c}_{ij} y_j}, \sum_{j=1}^{n} \overline{\boldsymbol{c}_{ij} y_j} \right] = \left[\sum_{j=1}^{n} c'_{ij} y_j, \sum_{j=1}^{n} c''_{ij} y_j \right], \quad i = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

где c'_{ij} и c''_{ij} — вещественные числа из множества $\{\underline{\boldsymbol{c}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{c}}_{ij}\}$ концов интервального элемента $\boldsymbol{c}_{ij}$, которые постоянны для любого отдельного ортанта, содержащего y. Это следует из правила умножения интервала на число (см., к примеру, [3]). Расписывая далее включение $\boldsymbol{C}y \subseteq \boldsymbol{d}$ покомпонентно и заменяя с учетом (14) каждое одномерное включение на два неравенства между концами интервалов, приходим к системе из $2m + n$ линейных алгебраических неравенств

$$\begin{cases} C'y \ge \underline{\boldsymbol{d}}, \\ C''y \le \overline{\boldsymbol{d}}, \\ \text{условия на знаки } y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{15}$$

где C', C'' — точечные матрицы, образованные концами элементов интервальной матрицы $\boldsymbol{C}$. Каждое нестрогое неравенство системы (15) определяет замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^n$, а множество решений для всей системы является пересечением этих полупространств, т. е. выпуклым полиэдральным множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Для интервальной системы линейных включений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [2, -2] & [-3, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ 2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

множество решений изображено на рис. 2. Оно является выпуклым и полиэдральным в пределах каждого ортанта (и даже пар ортантов), но в целом несвязно.

Напомним, что точка множества называется *внутренней*, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью. Для подмножеств в $\mathbb{R}^n$ можно сказать проще: внутренняя точка множества — это точка, которая находится в нем вместе с некоторым шаром, относительно какой-то нормы в $\mathbb{R}^n$, с центром в этой точке. *Топологической внутренностью* множества (или просто его *внутренностью*) называется совокупность всех его внутренних точек. Обычно внутренность множества X обозначается $\operatorname{int} X$. Точки множества, которые не лежат в его внутренности, образуют *границу* множества, обозначаемую ∂X.

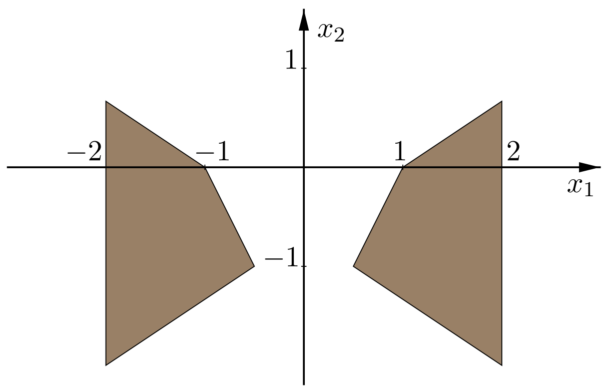

Рис. 2. Несвязное множество решений для интервального линейного включения (16)
Fig. 2. Disjoint solution set for interval linear inclusion (16)

Предложение 3. *Точка принадлежит внутренности множества решений $\varXi$ интервального линейного включения* (1) *тогда и только тогда, когда всякое достаточно малое ее возмущение вдоль координатных осей не приводит к выходу точки за пределы множества решений. Более точно,*

$$\begin{gathered} y \in \operatorname{int} \varXi \\ \Updownarrow \\ y \in \varXi \ \ \text{и} \ \ (\,\exists \varDelta > 0\,)(\,\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\,)(\,\forall |\varepsilon| < \varDelta\,)\bigl(\,x + \varepsilon \mathrm{e}_j \in \varXi\,\bigr), \end{gathered} \tag{17}$$

где $\mathrm{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\top$ *— вектор с единственной ненулевой компонентой на j-м месте, т. е. единичный вектор координатной оси $0x_j$.*

Доказательство. В эквивалентности (17) прямая (сверху вниз) импликация очевидна, так что в действительности мы должны доказать лишь обратную импликацию (снизу вверх). Обоснование обратной импликации в (17) является конструктивным. Предполагая, что для точки y существует такое $\varDelta > 0$, что $y \pm \varepsilon \mathrm{e}_j \in \varXi$ для всякого ε, удовлетворяющего $|\varepsilon| < \varDelta$, и каждого $j = 1, 2, \ldots, n$, мы явным образом предъявим окрестность точки y, которая целиком лежит во множестве решений $\varXi$.

Координаты y_j точки y могут быть равными нулю или же ненулевыми. Ясно, что возмущения нулевой координаты y_j приводят к тому, что $y_i + \varepsilon \mathrm{e}_j$ будет принимать как положительные, так и отрицательные значения. Но относительно ненулевых координат точки y без какой-либо потери общности мы можем предполагать, что их знаки сохраняются при всех возможных возмущениях ε, $|\varepsilon| < \varDelta$. Иначе всегда можно уменьшить положительное $\varDelta$ так, чтобы сформулированное выше условие соблюдалось.

Возьмем выпуклую оболочку S для множества $y \cup \{y \pm \varepsilon \mathrm{e}_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$, состоящего из $2n + 1$ точек — исходной точки y и ее возмущений вдоль координатных осей в обе стороны (рис. 3). Поскольку единичные векторы e_j являются n линейно независимыми векторами, выпуклая оболочка S также имеет размерность n, будучи телесным выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$, которое должно иметь непустую внутренность [26]. На самом деле S содержит некоторый открытый шар (относительно евклидова расстояния) с центром в y: это является чисто геометрическим фактом и следует из того, что e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — ортогональные единичные векторы в $\mathbb{R}^n$ (рис. 3). И этот открытый

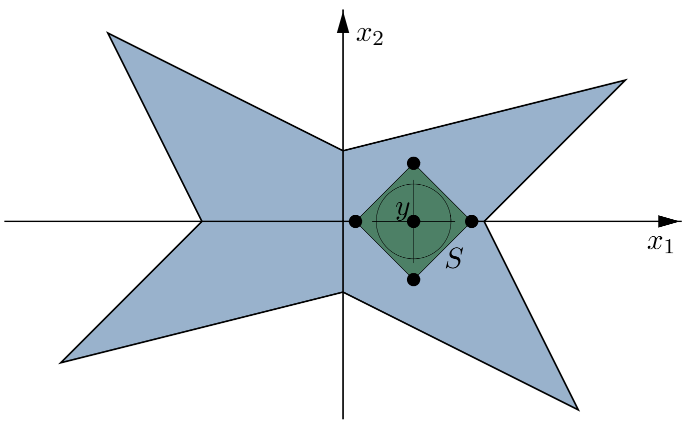

Рис. 3. Иллюстрация доказательства предложения 3
Fg. 3. Illustration of the proof of proposition 3

шар с центром в y, и непустая внутренность множества S являются искомыми окрестностями точки y, лежащими во множестве решений Ξ. Как следствие, доказательство предложения 3 будет завершено, если покажем, что S включается во множество решений Ξ. Чтобы обосновать этот факт, установим, что Ξ включает в себя пересечение S с каждым из ортантов пространства. Иными словами, докажем включение $S \subseteq \Xi$ “по частям”, на которые множество решений разбивается ортантами.

Если $\mathcal{O}$ — ортант пространства $\mathbb{R}^n$ и $S \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$, то из построения S и выбора Δ следует, что $y \in \mathcal{O}$. Кроме того, поскольку точки $y \pm \varepsilon \mathrm{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, представляют возмущения y, направленные вдоль координатных осей, $S \cap \mathcal{O}$ является выпуклой оболочкой точек из множества $y \cup \{y \pm \varepsilon \mathrm{e}_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$, которые принадлежат самому ортанту $\mathcal{O}$. Обозначим эту выпуклую оболочку через $S_{\mathcal{O}}$. Ясно, что $S_{\mathcal{O}}$ есть подмножество пересечения $S \cap \mathcal{O}$. Но и сам ортант $\mathcal{O}$ представим в виде выпуклой оболочки точки y и некоторых из лучей, выходящих из начала координат и задаваемых векторами $\pm \mathrm{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Как следствие, $S_{\mathcal{O}} = S \cap \mathcal{O}$.

Остается лишь заметить, что $S_{\mathcal{O}}$, будучи выпуклой оболочкой точек из множества решений Ξ и из $\mathcal{O}$, тоже включается во множество решений Ξ, так как Ξ выпукло в пределах ортанта $\mathcal{O}$. □

4. Положение точки относительно множества решений

Из определения резерва и непрерывности функционала $\mathrm{Rsv}\,(x)$ очевидно следует, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$\mathrm{Rsv}\,(y) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \Xi, \tag{18}$$

$$\mathrm{Rsv}\,(y) > 0 \quad \Longrightarrow \quad y \in \mathrm{int}\,\Xi, \tag{19}$$

$$\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \quad \Longleftarrow \quad y \in \partial\Xi, \tag{20}$$

где $\mathrm{int}\,\Xi$ — топологическая внутренность множества решений Ξ, а $\partial\Xi$ — граница множества решений Ξ. Естественный вопрос заключается в том, можно ли обратить логические импликации во втором и в третьем случае, получив тем самым эквивалентности. Это позволило бы в полном объеме исследовать положение точки по отношению к внутренности и границе множества решений, основываясь на значениях резерва.

Локализация точки в пределах множества решений также имеет практическую значимость. Если точка лежит во внутренности множества решений, то эта ее принадлежность устойчива к достаточно малым возмущениям как ее самой, так и данных задачи. Более того, мы можем тогда построить вокруг этой точки, как вокруг центра, брус внутренней оценки для множества решений [3, 18, 19, 27]. Но простые примеры показывают, что для выполнения импликации в обе стороны в (19), (20) на рассматриваемую систему отношений и на точку y должны быть наложены дополнительные условия.

Пример 3. Рассмотрим систему двух интервальных включений

$$\begin{cases} [0, -1]\, x \subseteq [0, 1], \\ [-2, 2]\, x \subseteq [-2, 2] \end{cases} \tag{21}$$

с одной неизвестной переменной x. График ее резерва изображен на рис. 4.

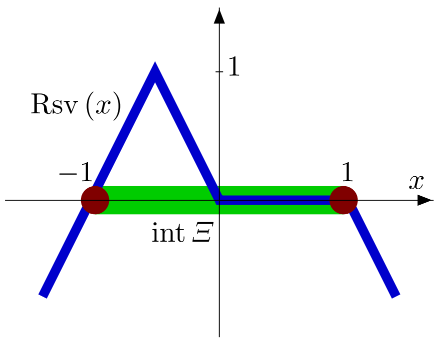

Рис. 4. График резерва для системы (21) из примера 3: точки -1 и 1 образуют границу $\partial\Xi$ множества решений Ξ
Fig. 4. Graph of the reserve for system (21) from example 3: points -1 and 1 form the boundary $\partial\Xi$ of the solution set Ξ

Можно видеть, что для любой точки из полуоткрытого интервала $[0, 1[$ значение резерва — нулевое, хотя на границе множества решений они не лежат. В частности, $\mathrm{Rsv}\,(0.5) = 0$, тогда как 0.5 находится во внутренности множества решений $\Xi = [-1, 1]$. Иными словами, следование в обратную сторону в соотношениях (19) и (20) для рассматриваемой системы не выполняется.

Для заданного интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ и точки $y \in \mathbb{R}^n$ разобьем индексные множества элементов матрицы $\boldsymbol{C}$ на следующие подмножества индексов:

для строчного индекса i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, обозначим

$$L := \{\, i \mid \underline{\boldsymbol{C}_{i:}y} = \underline{\boldsymbol{d}}_i \,\}, \qquad R := \{\, i \mid \overline{\boldsymbol{C}_{i:}y} = \overline{\boldsymbol{d}}_i \,\},$$
$$\neg L := \{\, i \mid \underline{\boldsymbol{C}_{i:}y} \neq \underline{\boldsymbol{d}}_i \,\}, \qquad \neg R := \{\, i \mid \overline{\boldsymbol{C}_{i:}y} \neq \overline{\boldsymbol{d}}_i \,\};$$

для столбцового индекса j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, обозначим

$$\begin{aligned} P &:= \{\, j \mid y_j > 0 \,\}, \\ N &:= \{\, j \mid y_j < 0 \,\}, \\ E &:= \{\, j \mid y_j = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Выбранные нами для обозначения этих подмножеств буквы L и R расшифровываются как “Left endpoint” и “Right endpoint”, а P, N и E — “Positive”, “Negative” и “Equal to zero” соответственно. В целом, будем иметь

$$\begin{aligned} L \cup \neg L &= \{1, 2, \ldots, m\}, \\ R \cup \neg R &= \{1, 2, \ldots, m\}, \\ P \cup N \cup E &= \{1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Определение 2. *Для интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ и значения y, которое принимается переменной x, обозначим посредством $\mathrm{ZEC}\,(y)$ условие на $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{d}$ и y, задаваемое следующим образом:*

$$\mathrm{ZEC}\,(y) \;:=\; \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\boldsymbol{C}}_{LP} = 0, & \overline{\boldsymbol{C}}_{LN} = 0, \\ \overline{\boldsymbol{C}}_{RP} = 0, & \underline{\boldsymbol{C}}_{RN} = 0, \end{array} \right. \quad \boldsymbol{C}_{(L\cup R)E} \subseteq 0, \tag{22}$$

где $\underline{\boldsymbol{C}}_{LP}$ означает подматрицу в пределах матрицы $\underline{\boldsymbol{C}}$, образованную всеми элементами, для которых индексная пара (i, j) принадлежит множеству $L \times P$, и т. п. Запись $(L \cup R)$ означает объединение индексных подмножеств L и R для строк.

Смысл специального условия ZEC состоит в том, что привлечение его самого или его отрицания позволяет получить выполнение импликаций, обратных к (19) и (20). Можно образно назвать условие ZEC "условием нулевых концов" ("Zero Endpoints Condition") на матрицу $\boldsymbol{C}$ рассматриваемого интервального линейного включения.

Предложение 4. *Пусть Ξ — множество решений интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$, в котором $\boldsymbol{C} \in \mathbb{KR}^{m\times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{KR}^m$. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место*

$$y \in \operatorname{int} \Xi \iff \big(\operatorname{Rsv}(y) > 0\big) \vee \big(\operatorname{Rsv}(y) = 0 \ \&\ \operatorname{ZEC}(y)\big),$$

$$y \in \partial\Xi \iff \big(\operatorname{Rsv}(y) = 0 \ \&\ \neg\operatorname{ZEC}(y)\big),$$

где "$\neg$" означает логическое отрицание; & — логическая конъюнкция (логическое "и"); $\vee$ — логическая дизъюнкция (логическое "или").

Доказательство. Наш план состоит в том, чтобы, используя результат предложения 3, доказать первую эквивалентность из формулировки предложения 4. Вторая эквивалентность из предложения 4 в действительности следует из первой, будучи ее логическим отрицанием.

Взяв точку $y \in \mathbb{R}^n$, исследуем ее возмущения вдоль координатных осей пространства и их влияние на принадлежность этой точки множеству решений Ξ. В силу предложения 3 этого достаточно для выяснения того, принадлежит ли точка x внутренности множества решений.

Предполагая, что индексное множество P непусто, $P \neq \varnothing$, зафиксируем такой индекс $j \in P$, что $y_j > 0$. Если $\varepsilon > 0$, то

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}(y + \varepsilon \mathrm{e}_j) &= \sum_{k\neq j} \boldsymbol{C}_{:k} y_k + \boldsymbol{C}_{:j}(y_j + \varepsilon) = \\
&= \sum_{k\neq j} \boldsymbol{C}_{:k} y_k + \big[\underline{\boldsymbol{C}}_{:j}(y_j+\varepsilon), \overline{\boldsymbol{C}}_{:j}(y_j+\varepsilon)\big], \qquad \text{так как } y_j + \varepsilon > 0, = \qquad (23)\\
&= \sum_{k\neq j} \boldsymbol{C}_{:k} y_k + \big[\underline{\boldsymbol{C}}_{:j} y_j + \underline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon, \overline{\boldsymbol{C}}_{:j} y_j + \overline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon\big], \qquad (24)\\
&\qquad\qquad \text{поскольку } \underline{\boldsymbol{C}}_{:j} \text{ и } \overline{\boldsymbol{C}}_{:j} \text{ суть точечные (неинтервальные)}, = \\
&= \sum_{k\neq j} \boldsymbol{C}_{:k} y_k + \big[\underline{\boldsymbol{C}}_{:j} y_j, \overline{\boldsymbol{C}}_{:j} y_j\big] + \big[\underline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon, \overline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon\big] = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{C}_{:k} y_k + \big[\underline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon, \overline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon\big], \qquad \text{так как } y_j > 0, = \\
&= \big[\,\underline{\boldsymbol{C}y} + \underline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon,\ \overline{\boldsymbol{C}y} + \overline{\boldsymbol{C}}_{:j}\varepsilon\,\big]. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Принадлежность $y + \varepsilon \mathrm{e}_j \in \Xi$ равносильна включению $\boldsymbol{C}(y + \varepsilon \mathrm{e}_j) \subseteq \boldsymbol{d}$, которое в силу (25) означает, что

$$\underline{\boldsymbol{C}y} + \underline{\boldsymbol{C}}_{:j}\,\varepsilon \ \geq\ \underline{\boldsymbol{d}} \qquad \text{и} \qquad \overline{\boldsymbol{C}y} + \overline{\boldsymbol{C}}_{:j}\,\varepsilon \ \leq\ \overline{\boldsymbol{d}}. \qquad (26)$$

Если $y \in \varXi$, то из определения индексного подмножества L можно заключить, во-первых, что

$$\underline{\boldsymbol{C}_{L:}y} = \underline{\boldsymbol{d}}_L,$$

и, во-вторых,

$$\underline{\boldsymbol{C}_{\neg L:}y} > \underline{\boldsymbol{d}}_{\neg L}.$$

Последнее строгое неравенство остается верным и при достаточно малых возмущениях ε, тогда как предыдущее равенство имеет нетривиальные следствия.

Требование того, чтобы $y + \varepsilon \mathrm{e}_j \in \varXi$, влечет

$$\underline{\boldsymbol{C}_{L:}\, y} + \underline{\boldsymbol{C}}_{Lj}\varepsilon \;\geq\; \underline{\boldsymbol{d}}_L.$$

Но выписанное неравенство удовлетворяется лишь для $\underline{\boldsymbol{C}}_{Lj}\,\varepsilon \geq 0$, что означает $\underline{\boldsymbol{C}}_{Lj} \geq 0$ ввиду $\varepsilon > 0$. Далее, аналогичные рассуждения, примененные ко второму неравенству из (26) и индексному подмножеству R, имеют следствием $\overline{\boldsymbol{C}}_{Rj} \leq 0$.

С другой стороны, в наших предшествующих рассуждениях, начиная с (23), мы можем взять точку $(y - \varepsilon \mathrm{e}_j)$ вместо $(y + \varepsilon \mathrm{e}_j)$. При этом нужно лишь обратить внимание на то, что ε должно быть выбрано достаточно малым, чтобы не нарушить неравенство $y_j - \varepsilon > 0$, которое позволяет перейти от (23) к (24). Следовательно, $\underline{\boldsymbol{C}}_{Lj} \leq 0$ и $\overline{\boldsymbol{C}}_{Rj} \geq 0$. Наконец, сопоставляя этот факт с предыдущими результатами для $\underline{\boldsymbol{C}}_{Lj}$ и $\overline{\boldsymbol{C}}_{Rj}$, приходим к заключению, что $\underline{\boldsymbol{C}}_{Lj} = 0$ и $\overline{\boldsymbol{C}}_{Rj} = 0$ для любого $j \in P$. Иными словами, $\underline{\boldsymbol{C}}_{LP} = 0$ и $\overline{\boldsymbol{C}}_{RP} = 0$.

Совершенно тем же способом, зафиксировав некоторый индекс $j \in N$ (при условии, что $N \neq \varnothing$), можем доказать, что $\overline{\boldsymbol{C}}_{LN} = 0$ и $\underline{\boldsymbol{C}}_{RN} = 0$. Мы опускаем детали этого построения ради краткости изложения.

Для доказательства включения $\boldsymbol{C}_{(L\cup R)E} \subseteq 0$ зафиксируем среди компонент точки y компоненту с индексом $j \in E$ (при условии, что $E \neq \varnothing$). Рассматривая ε-возмущения точки y вдоль j-й оси, аналогично тому, как это делалось в предшествующей части доказательства, получим неравенства $\underline{\boldsymbol{C}}_{(L\cup R)j} \geq 0$ и $\overline{\boldsymbol{C}}_{(L\cup R)j} \leq 0$. Поэтому, как и требовалось, $\boldsymbol{C}_{(L\cup R)E} \subseteq [0,0]$ в полной интервальной арифметике Каухера [1–3]. Второстепенные детали этого построения опускаются.

Подводя промежуточный итог, получаем логическую эквивалентность

$$y \in \operatorname{int}\varXi \Longleftrightarrow y \in \varXi \;\&\; \underline{\boldsymbol{C}}_{LP} = 0 \;\&\; \overline{\boldsymbol{C}}_{RP} = 0 \;\&\; \overline{\boldsymbol{C}}_{LN} = 0 \;\&\; \underline{\boldsymbol{C}}_{RN} = 0 \;\&\; \boldsymbol{C}_{(L\cup E)E} \subseteq 0.$$

В правой части выписанной эквивалентности условие во второй строке есть не что иное, как специальное условие $\mathrm{ZEC}\,(y)$, определенное в (22). Мы можем преобразовать полученный результат дальше, принимая во внимание тот факт, что принадлежность $y \in \varXi$ означает $\mathrm{Rsv}\,(y) \geq 0$:

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{int}\varXi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Rsv}\,(y) \geq 0 \;\;\&\;\; \mathrm{ZEC}\,(y) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) > 0 \;\&\; \mathrm{ZEC}\,(y)\bigr) \vee \bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \;\&\; \mathrm{ZEC}\,(y)\bigr) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Rsv}\,(y) > 0 \;\;\vee\;\; \bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \;\&\; \mathrm{ZEC}\,(y)\bigr), \end{aligned}$$

поскольку для $\mathrm{Rsv}\,(y) > 0$ имеем $L = \varnothing$ и $R = \varnothing$, и потому условие ZEC выполнено. Последняя логическая формула в точности совпадает с той, что стоит в правой части первой эквивалентности предложения 4.

Наконец, докажем вторую эквивалентность предложения 4. Как было отмечено, она является отрицанием первой эквивалентности (которая уже обоснована выше), взятой при условии $y \in \Xi$. Так как любая точка множества решений Ξ является либо внутренней, либо граничной, отрицание принадлежности $x \in \operatorname{int}\Xi$ — это принадлежность $x \in \partial\Xi$. Построим теперь отрицание логической формулы из правой части первой эквивалентности:

$$
\begin{array}{c}
\neg\Big(\big(\operatorname{Rsv}(y) > 0\big) \;\vee\; \big(\operatorname{Rsv}(y) = 0 \;\;\&\;\; \operatorname{ZEC}(y)\big) \Big)\\
\Updownarrow \quad \text{в силу логического закона де Моргана}\\
\neg\big(\operatorname{Rsv}(y) > 0\big) \;\;\&\;\; \neg\big(\operatorname{Rsv}(y) = 0 \;\;\&\;\; \operatorname{ZEC}(y)\big)\\
\Updownarrow \quad \text{в силу закона де Моргана}\\
\big(\operatorname{Rsv}(y) = 0\big) \;\;\&\;\; \big(\operatorname{Rsv}(y) > 0 \;\vee\; \neg\operatorname{ZEC}(y)\big)\\
\Updownarrow \quad \text{в силу дистрибутивности “\&” и “}\vee\text{”}\\
\big(\operatorname{Rsv}(y) = 0 \;\;\&\;\; \operatorname{Rsv}(y) > 0\big) \;\vee\; \big(\operatorname{Rsv}(y) = 0 \;\;\&\;\; \neg\operatorname{ZEC}(y)\big)\\
\Updownarrow\\
\operatorname{Rsv}(y) = 0 \;\;\&\;\; \neg\operatorname{ZEC}(y),
\end{array}
$$

поскольку ($\operatorname{Rsv}(y) = 0$ & $\operatorname{Rsv}(y) > 0$) всегда ложно. Полученная логическая формула совпадает с правой частью второй эквивалентности предложения 4. $\square$

Задаваемое определением 2 “условие нулевых концов” $\operatorname{ZEC}(y)$ можно редуцировать к более удобной, хотя и менее общей форме. Чтобы дать соответствующую формулировку, необходимо

Определение 3. *Вершиной интервального вектора $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}^l$ называется любая такая точка $u \in \overline{\mathbb{R}}^l$, что $u_k \in \{\underline{\boldsymbol{u}}_k, \overline{\boldsymbol{u}}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Иными словами, это точечный вектор, составленный из концов интервальных компонент вектора $\boldsymbol{u}$. Множество всех вершин интервального вектора $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}\overline{\mathbb{R}}^l$ обозначим* $\operatorname{vert}\boldsymbol{u}$, *т. е.*

$$\operatorname{vert}\boldsymbol{u} = \big\{\, u \in \overline{\mathbb{R}}^l \mid u_k \in \{\underline{\boldsymbol{u}}_k, \overline{\boldsymbol{u}}_k\}, k = 1, 2, \ldots, l \,\big\}.$$

Предложение 5. *Пусть для интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$*

(I) *выполнено по крайней мере одно из следующих условий:*

- *точка y не лежит на координатной гиперплоскости,*
- *матрица $\boldsymbol{C}$ является правильной;*

(II) *расширенная $m \times (n+1)$-матрица $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{d})$ не имеет строк с нулевыми вершинами.*

Тогда

$$
\begin{aligned}
y \in \operatorname{int}\Xi \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rsv}(y) > 0,\\
y \in \partial\Xi \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rsv}(y) = 0.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что вторая эквивалетность в утверждении предложения 5 получается как логическое отрицание первой. Поэтому на отдельном доказательстве второй эквивалентности мы не останавливаемся.

В силу предложения 4

$$y \in \operatorname{int} \Xi \quad\Longleftrightarrow\quad \bigl(\,\mathrm{Rsv}\,(y) > 0\,\bigr) \vee \bigl(\,\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \;\;\&\;\; \mathrm{ZEC}\,(y)\,\bigr).$$

Следовательно, для обоснования предложения 5 достаточно показать, что второй член дизъюнкции в правой части выписанной равносильности, т. е. условие

$$\bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \;\;\&\;\; \mathrm{ZEC}\,(y)\bigr),$$

несовместим с предпосылкой предложения 5. Для реализации описанного плана продемонстрируем, что если истинно $\bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \;\;\&\;\; \mathrm{ZEC}\,(y)\bigr)$ и выполнено условие (I), то условие (II) нарушается, т. е. неверно, что

$$\forall\, i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \bigl(0 \notin \operatorname{vert}\,(\boldsymbol{C}_{i:}, \boldsymbol{d}_i)\bigr).$$

По определению индексных множеств L, R, P, N, E имеем

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{d}}_L \;&=\; \underline{\boldsymbol{C}}_{LP}\, x_P + \overline{\boldsymbol{C}}_{LN}\, x_N + \boldsymbol{C}_{LE} \cdot 0, \\ \overline{\boldsymbol{d}}_R \;&=\; \overline{\boldsymbol{C}}_{RP}\, x_P + \underline{\boldsymbol{C}}_{RN}\, x_N + \boldsymbol{C}_{RE} \cdot 0, \end{aligned}$$

так что справедливо

$$\mathrm{ZEC}\,(y) \quad\Longrightarrow\quad \underline{\boldsymbol{d}}_L = 0 \;\;\&\;\; \overline{\boldsymbol{d}}_R = 0. \tag{27}$$

В то же время

$$\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \quad\Longrightarrow\quad L \neq \varnothing \;\;\vee\;\; R \neq \varnothing. \tag{28}$$

Из импликаций (27) и (28) вытекает, что при условии $\bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) = 0 \;\;\&\;\; \mathrm{ZEC}\,(y)\bigr)$ верно следующее:

$$\begin{aligned} &(\exists l)\bigl(\underline{\boldsymbol{C}}_{lP} = 0 \;\&\; \overline{\boldsymbol{C}}_{lN} = 0 \;\&\; \boldsymbol{C}_{lE} \subseteq 0 \;\&\; \underline{\boldsymbol{d}}_l = 0\bigr) \\ &\qquad\qquad \vee\;\; (\exists r)\bigl(\overline{\boldsymbol{C}}_{rP} = 0 \;\&\; \underline{\boldsymbol{C}}_{rN} = 0 \;\&\; \boldsymbol{C}_{rE} \subseteq 0 \;\&\; \overline{\boldsymbol{d}}_r = 0\bigr). \end{aligned} \tag{29}$$

Если точка y не лежит на координатной гиперплоскости, то $E = \varnothing$ и (29) влечет существование такого индекса i, что $0 \in \operatorname{vert}\,(\boldsymbol{C}_{i:}, \boldsymbol{d}_i)$, а это противоречит предпосылке (II).

Если интервальная матрица $\boldsymbol{C}$ — правильная, то включение $\boldsymbol{C}_{lE} \subseteq 0$ равносильно $\boldsymbol{C}_{lE} = 0$, а включение $\boldsymbol{C}_{rE} \subseteq 0$ равносильно $\boldsymbol{C}_{rE} = 0$. Тогда из условия (29) снова следует нарушение предпосылки (II). □

Результаты этого раздела, условие ZEC и здравый смысл подсказывают следующий способ предобработки системы интервальных включений $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$. Если $\boldsymbol{C}_{i:} = 0$ для некоторого индекса $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, т. е. строка $\boldsymbol{C}_{:i}$ матрицы системы — целиком нулевая, и вдобавок $0 \in \boldsymbol{d}_i$, то можно удалить соответствующее включение из системы без какого-либо влияния на ее множество решений. Это возможно потому, что множеством решений i-го включения является все $\mathbb{R}^n$. Полученная после удаления i-го включения система меньше по размеру и имеет лучшие свойства резерва Rsv.

5. Разрешимость включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$

В этом разделе работы исследуется разрешимость включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$, т. е. мы отвечаем на вопрос о том, пусто или непусто его множество решений. Далее для краткости обозначим

$$\max \mathrm{Rsv} := \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Rsv}\,(x).$$

Если функционал $\mathrm{Rsv}\,(x)$ не ограничен сверху, полагаем $\max \mathrm{Rsv} = \infty$.

Из эквивалентности $\bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) \geq 0 \iff y \in \varXi\bigr)$ вытекает, что

$$\varXi \neq \varnothing \quad \iff \quad \max \mathrm{Rsv} \geq 0.$$

Как следствие, изучение разрешимости включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ (а также связанных с ним интервальных линейных задач) сводится к решению задачи безусловной оптимизации:

$$\text{найти} \quad \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Rsv}\,(x).$$

После этого нужно посмотреть на знак найденного максимума.

Наконец, можем рассмотреть вопрос о том, пуста или непуста топологическая внутренность множества решений $\varXi$. Иными словами, существуют ли решения включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$, устойчивые к малым возмущениям их положения? В общем случае, из импликации $\bigl(\mathrm{Rsv}\,(y) > 0 \implies y \in \operatorname{int}\varXi\bigr)$ вытекает, что

$$\max \mathrm{Rsv} > 0 \quad \implies \quad \operatorname{int}\varXi \neq \varnothing. \tag{30}$$

Но конкретные примеры показывают, что следование в обратную сторону в (30) может оказаться неверным.

Пример 4. $(\not\Longleftarrow)$ Для включения $[0,1]\,x \subseteq [0,1]$ множество решений есть $[0,1]$. Имеем поэтому $\operatorname{int}\varXi = \,]0,1[\, \neq \varnothing$, но $\max \mathrm{Rsv} = 0$. Соответствующий график резерва характеристического включения изображен на рис. 5.

Тем не менее, наложив на $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$ некоторые дополнительные условия, мы сможем в импликации (30) делать заключения в обратную сторону.

Предложение 6. *Пусть для интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ расширенная $m \times (n+1)$-матрица $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{d})$ не имеет строк с нулевыми вершинами. Тогда*

$$\operatorname{int}\varXi \neq \varnothing \quad \iff \quad \max \mathrm{Rsv} > 0,$$

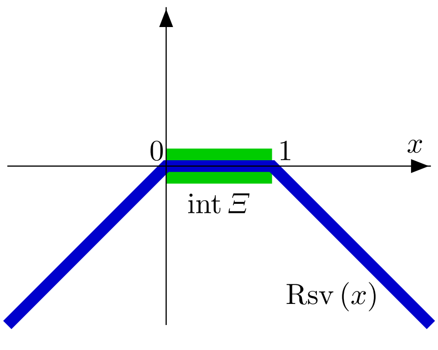

Рис. 5. Нулевой максимум резерва в примере 4
Fig. 5. Zero maximum of the reserve in example 4

т. е. непустота внутренности множества решений этого включения равносильна тому, что безусловный максимум резерва строго больше нуля.

Доказательство. Если $\max \mathrm{Rsv} > 0$, то существует такое $y \in \mathbb{R}^n$, что $\mathrm{Rsv}\,(y) > 0$. Следовательно, $y \in \mathrm{int}\,\Xi$ с учетом (19), и поэтому $\mathrm{int}\,\Xi \neq \varnothing$.

Обратно, пусть $\mathrm{int}\,\Xi \neq \varnothing$. Тогда $\mathrm{int}\,\Xi$ содержит некоторый открытый шар B (относительно какой-то нормы). В пределах B можно взять точку y, которая не принадлежит координатным плоскостям. Кроме того, расширенная матрица $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{d})$ не имеет строк с нулевыми вершинами, и по этой причине можем применить предложение 5, заключая, что $\mathrm{Rsv}\,(y) > 0$. Тогда $\max \mathrm{Rsv} \geq \mathrm{Rsv}\,(y) > 0$, как и требовалось. □

6. “Наилучшие” точки включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$

Из предшествующих рассуждений следует, что функция $\mathrm{Rsv}\,(x)$ дает количественную меру того, “насколько сильно” (или “насколько хорошо”) выполняется включение $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$. Точки, в которых достигается максимум функции $\mathrm{Rsv}\,(x)$, имеют в этом смысле особое значение, так как они удовлетворяют включению $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ в “наибольшей возможной мере”, если это включение в самом деле справедливо, или же имеют “наименьший дефицит включения”, если это включение неверно. Такие точки обычно являются в определенном смысле “наилучшими точками” из множества решений или же точками, в которых выполняются некоторые дополнительные условия оптимальности.

Ниже кратко излагаются соответствующие результаты, и для удобства используется обозначение

$$\arg\max \;:=\; \{\, y \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Rsv}\,(y) = \max \mathrm{Rsv}\,\}$$

— множество всех точек, на которых достигается максимум резерва. Мы различаем три случая: когда $\max \mathrm{Rsv}$ является положительным, нулевым и отрицательным.

Случай $\max \mathrm{Rsv} > 0$ (рис. 6):

- $\arg\max$ состоит из всех точек, для которых включение $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ выполняется с максимальным положительным резервом;
- $\arg\max \subseteq \mathrm{int}\,\Xi$.

Можно считать, что точки из $\arg\max$ являются тогда “наиболее устойчивыми” по отношению к возмущениям, в частности, по отношению к изменениям в исходных данных, т. е. в $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{d}$.

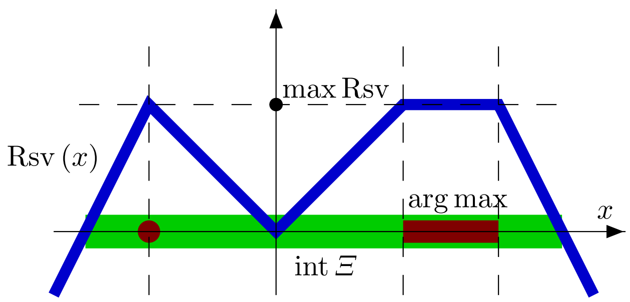

Рис. 6. Положительный максимум резерва
Fig. 6. Positive maximum of the reserve

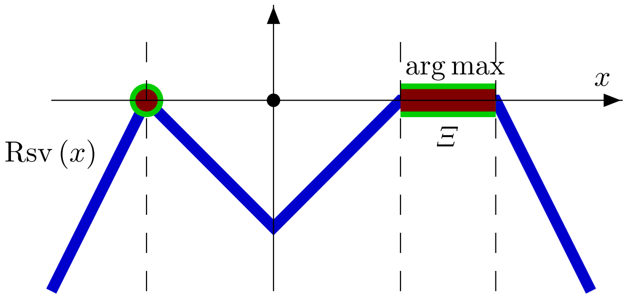

Рис. 7. Нулевой максимум резерва
Fig. 7. Zero maximum of the reserve

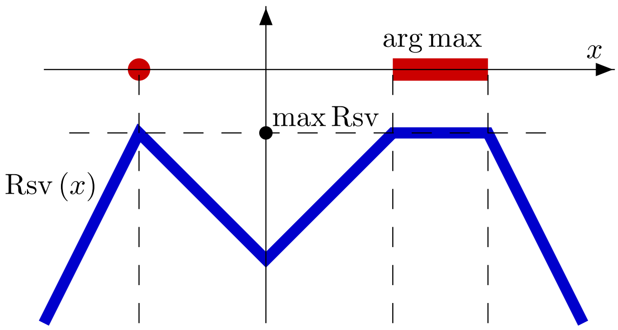

Рис. 8. Отрицательный максимум резерва
Fig. 8. Negative maximum of the reserve

Случай $\max \mathrm{Rsv} = 0$ (рис. 7):

- $\arg\max$ состоит из всех точек, для которых $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ имеет место с максимальным резервом, хотя этот резерв и равен нулю;
- $\arg\max = \Xi$.

Случай $\max \mathrm{Rsv} < 0$ (рис. 8):

- $\arg\max$ состоит из всех точек, для которых $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ нарушается в минимальной возможной мере;
- $\Xi = \varnothing$, но $\arg\max$ является множеством решений включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d} + [\max \mathrm{Rsv}\,, -\max \mathrm{Rsv}\,] \cdot (1, 1, \dots, 1)^\top$.

Несмотря на то что множество решений включения в последнем случае пусто, точки из $\arg\max$, доставляющие максимум резерва, можно рассматривать как “псевдорешения” соответствующей системы интервальных отношений, для которой исследуемое включение является характеристическим (см. разд. 1). Именно такие точки минимизируют “расхождение” левой и правой частей включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$. В частности, точки из $\arg\max$ являются первыми точками, которые появятся в непустом множестве решений при равномерном расширении вектора правой части $\boldsymbol{d}$ на величину $\max \mathrm{Rsv}$. Это прямо следует из (9) или даже из самого определения резерва.

Отметим, что частные случаи этой общей конструкции были реализованы в работах [20, 22, 28] в виде перспективного метода оценивания параметров линейных зависимостей по данным с интервальной неопределенностью (метод максимума согласования), который успешно работает и в том случае, когда данные несовместны.

7. Вычислительная сложность

В заключение работы обсудим сложность реализации развитой выше техники, основанной на применении резерва характеристического включения, для исследования множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим первую формулу из (9):

$$\mathrm{Rsv}\,(x) \;=\; \min_{1\leq i\leq m}\; \min \left\{ \underline{\boldsymbol{C}_{i:}x} - \underline{\boldsymbol{d}}_i,\; -\overline{\boldsymbol{C}_{i:}x} + \overline{\boldsymbol{d}}_i \right\}.$$

Выражения, стоящие под знаками минимумов, можно переписать в развернутом виде следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{\boldsymbol{c}_{ij} x_j} - \underline{\boldsymbol{d}}_i \qquad \text{и} \qquad -\sum_{j=1}^{n} \overline{\boldsymbol{c}_{ij} x_j} + \overline{\boldsymbol{d}}_i.$$

Поэтому вычисление значения $\mathrm{Rsv}(x)$ требует $2n$ умножений и n сложений для каждого из выражений, стоящих под знаками минимумов в (9). В целом для интервальной $m \times n$-системы линейных включений $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ на вычисление выражения для Rsv затрачивается $m \cdot 2 \cdot (2n + n) = 6mn$ арифметических операций, что весьма немного. Взятие минимумов и максимумов мы не учитываем, так как они значительно более быстрые, чем арифметические операции. Поскольку проверка условия ZEC (22) и его различных вариантов также не требует больших трудозатрат, можно утверждать, что исследование положения точки относительно множества AE-решений, использующее функционал резерва характеристического включения (см. разд. 4), в целом является несложным.

Вопросы разрешимости, рассмотренные в разд. 5, а также конструкции, относящиеся к “наилучшим точкам” множеств решений из разд. 6, требуют нахождения безусловного максимума функционала резерва. Это трудная задача, так как в общем случае $\mathrm{Rsv}\,(x)$ является негладкой многоэкстремальной функцией, график которой выглядит в общем случае примерно так, как изображено на рис. 1.

Но не следует воспринимать это обстоятельство как недостаток предлагаемой в работе методики. Она в принципе не может быть более простой, чем теоретическая сложность распознавания множества решений Ξ. Для эквивалентных включению $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ интервальных систем линейных алгебраических уравнений и их множеств AE-решений сложность задачи распознавания была исследована А.В. Лакеевым [13], который доказал ее NP-полноту при условии, что в интервальной линейной системе “достаточно много” элементов имеют интервальную неопределенность E-типа. В терминах интервального линейного включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ результат А.В. Лакеева эквивалентен утверждению о том, что распознавание множества решений Ξ является NP-полной задачей, если матрица $\boldsymbol{C}$ и вектор правых частей $\boldsymbol{d}$ имеют в совокупности “достаточно много” неправильных интервалов в $\boldsymbol{C}$ и правильных интервалов в $\boldsymbol{d}$.

С другой стороны, если интервальная линейная система отношений имеет “немного” интервальных параметров с E-типом неопределенности, то ее решения могут быть распознаны алгоритмами с полиномиальной сложностью. Тогда и максимизация функционала резерва $\mathrm{Rsv}\,(x)$ также не является трудной задачей. Такова, к примеру, ситуация с допусковым множеством решений (10) и его распознающим функционалом (11) [3, 18, 19]. Максимум этого функционала может быть эффективно найден за полиномиальное время современными методами негладкой оптимизации, чем широко пользуются на практике.

Таким образом, сведение исследования разрешимости включения $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ к задаче безусловной оптимизации с целевой функцией $\mathrm{Rsv}\,(x)$ дает гибкость в выборе инструментов и их использовании. В частности, для конкретных задач мы можем выбрать тот или иной метод оптимизации в зависимости от наших потребностей, возможностей и свойств метода, его удобства и наличных ресурсов.

Список литературы

[1] **Kaucher E.** Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung der Ordnungsund Verbandsstrukturen. Computing Supplement 1. 1977:65–79.

[2] **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$. Computing Supplement 2. 1980:33–49.

[3] **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: ИВТ СО РАН; 2021. Адрес доступа: `http://www.nsc.ru/interval/InteBooks`

[4] **Kearfott B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis. Computational Technologies. 2010; 15(1):7–13.

[5] **Shary S.P.** Algebraic solutions to interval linear equations and their applications. Numerical Methods and Error Bounds, Proceedings of IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds, Oldenburg, Germany, July 9–12, 1995. Math. Research. Berlin: Akademie Verlag; 1996; (89):224–233. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/Herz.pdf`

[6] **Шарый С.П.** Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью. Известия РАН. Теория и системы управления. 1997; (3):51–61.

[7] **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity. Reliable Computing. 2002; 8(5):321–418. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf`

[8] **Шарая И.А.** Бескванторные описания для интервально-кванторных линейных систем. Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014; 20(2):311–323. Адрес доступа: `http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/trIMM14.pdf`

[9] **Клини С.К.** Математическая логика. М.: Мир; 1973: 480.

[10] **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир; 1970: 416.

[11] **Dymova L.** Soft computing in economics and finance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer; 2011: 295. DOI:10.1007/978-3-642-17719-4.

[12] **Sainz M.Á., Gardeñes E., Jorba L.** Interval estimations of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations. Reliable Computing. 2002; (8):283–305. DOI:10.1023/A:1016385132064.

[13] **Lakeyev A.V.** Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems. Computational Technologies. 2003; 8(1):12–23. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/lakeyev/publications/03ct.pdf`

[14] **Goldsztejn A., Chabert G.** On the approximation of linear AE-solution sets. Proceedings of the 12th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics SCAN 2006, Duisburg, Germany, September 26–29, 2006. IEEE; 2006: 18. DOI:10.1109/SCAN.2006.33.

[15] **Popova E.** Explicit description of AE-solution sets for parametric linear systems. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2012; 33(4):1172–1189. DOI:10.1137/120870359.

[16] **Rohn J.** A handbook of results on interval linear problems. Electronic book. Prague: Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic; 2012. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ILinProblems.pdf`

[17] **Hladík M.** AE-solutions and AE-solvability to general interval linear systems. Linear Algebra and its Applications. 2015; (465):221–238. DOI:10.1016/j.laa.2014.09.030.

[18] **Shary S.P.** Solving the linear interval tolerance problem. Mathematics and Computers in Simulation. 1995; (39):53–85.

[19] **Шарый С.П.** Решение интервальной линейной задачи о допусках. Автоматика и телемеханика. 2004; (10):147–162. Адрес доступа: `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/AiT-04.pdf`

[20] **Шарый С.П., Шарая И.А.** Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных. Вычислительные технологии. 2013; 18(3):80–109. Адрес доступа: `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/Sharys-JCT2013.pdf`

[21] **Shary S.P., Sharaya I.A.** On solvability recognition for interval linear systems of equations. Optimization Letters. 2015; 10(2):247–260. DOI:10.1007/s11590-015-0891-6.

[22] **Shary S.P.** Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty. Journal of Global Optimization. 2016; 66(1):111–126. DOI:10.1007/s10898-015-0340-1.

[23] **Шарый С.П.** Новые характеризации множества решений для интервальных систем линейных уравнений. Вычислительные технологии. 2016; 21(5):111–118.

[24] **Носков С.И., Лакеев А.В.** PC-решения и квазирешения интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021; 17(3). — в печати.

[25] **Beeck H.** Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Ggleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten. Computing. 1972; 10(3):231–244. DOI:10.1007/BF02316910.

[26] **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир; 1973: 469.

[27] **Shary S.P.** A new method for inner estimation of solution sets to interval linear systems. Modelling, Design, and Simulation of Systems with Uncertainties. Mathematical Engineering. 2011; (3):21–42. DOI:10.1007/978-3-642-15956-5_2.

[28] **Shary S.P.** Weak and strong compatibility in data fitting problems under interval uncertainty. Advances in Data Science and Adaptive Analysis. 2020; 12(1):2050002. DOI:10.1142/S2424922X20500023.

Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 3, с. 61–85. © ФИЦ ИВТ, 2021 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 3, pp. 61–85. © FRC ICT, 2021 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.005

Reserve of characteristic inclusion for interval linear systems of relations

SHARAYA IRENE A., SHARY SERGEY P.*

Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia
*Corresponding author: Shary Sergey P., e-mail: `shary@ict.nsc.ru`

Received March 4, 2020, revised March 18, 2021, accepted March 25, 2021

Abstract

In this paper, we consider interval linear inclusions $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ in the Kaucher complete interval arithmetic. These inclusions are important both on their own and because they provide equivalent and useful descriptions for the so-called quantifier solutions and AE-solutions to interval systems of linear algebraic relations of the form $\boldsymbol{A}x\ \sigma\ \boldsymbol{b}$, where $\boldsymbol{A}$ is an interval $m \times n$-matrix, $x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}$ is an interval m-vector, and $\sigma \in \{=, \leq, \geq\}^m$. In other words, these are interval systems in which equations and non-strict inequalities can be mixed. Considering the inclusion $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ in the Kaucher complete interval arithmetic allows studing simultaneously and in a uniform way all the different special cases of quantifier solutions and AE-solutions of interval systems of linear relations, as well as using interval analysis methods.

A quantitative measure, called the “inclusion reserve”, is introduced to characterize how strong the inclusion $\boldsymbol{C}x \subseteq \boldsymbol{d}$ is fulfilled. In our work, we investigate its properties and applications. It is shown that the inclusion reserve turns out to be a useful tool in the study of AE-solutions and quantifier solutions of interval linear systems of equations and inequalities. In particular, the use of the inclusion reserve helps to determine the position of a point relative to a solution set, in investigating whether the solution set is empty or not, whether a point is in the interior of the solution set, etc.

Keywords: interval linear systems, AE-solutions, quantifier solutions, solution set, characteristic inclusion, inclusion reserve, recognizing functional.

Citation: Sharaya I.A., Shary S.P. Reserve of characteristic inclusion for interval linear systems of relations. Computational Technologies. 2021; 26(3):61–85.DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.005. (In Russ.)

References

1. **Kaucher E.** Algebraische erweiterungen der intervallrechnung unter erhaltung der ordnungsund verbandsstrukturen. Computing Supplement 1. 1977:65–79.
2. **Kaucher E.** Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{IR}$. Computing Supplement 2. 1980:33–49.
3. **Shary S.P.** Konechnomernyy interval’nyy analiz [Finite-dimensional interval analysis]. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/InteBooks` (In Russ.)
4. **Kearfott B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P.** Standardized notation in interval analysis. Computational Technologies. 2010; 15(1):7–13.
5. **Shary S.P.** Algebraic solutions to interval linear equations and their applications. Numerical Methods and Error Bounds, Proceedings of IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds, Oldenburg, Germany, July 9–12, 1995. Math. Research. Berlin: Akademie Verlag; 1996; (89):224–233. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/Herz.pdf`
6. **Sharyi S.P.** Algebraic approach to the analysis of linear static systems with interval uncertainty. International Journal of Computer and System Sciences. 1997; 36(3):378–387.
7. **Shary S.P.** A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity. Reliable Computing. 2002; 8(5):321–418. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ANewTech.pdf`
8. **Sharaya I.A.** Quantifier-free descriptions for interval–quantifier linear systems. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS (Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN). 2014; 20(2):311–323. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/trIMM14.pdf` (In Russ.)
9. **Kleene S.C.** Mathematical logic. N.Y.: John Wiley & Sons; 1967: 398.
10. **Kuratowski K., Mostowski A.** Set theory. Amsterdam; N.Y.; Oxford: North-Holland Publishing Co.; PWN — Polish Scientific Publishers; Warszawa; 1968: 417.
11. **Dymova L.** Soft computing in economics and finance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer; 2011: 295. DOI:10.1007/978-3-642-17719-4.
12. **Sainz M.Á., Gardeñes E., Jorba L.** Interval estimations of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations. Reliable Computing. 2002; (8):283–305. DOI:10.1023/A:1016385132064.
13. **Lakeyev A.V.** Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems. Computational Technologies. 2003; 8(1):12–23. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/lakeyev/publications/03ct.pdf`
14. **Goldsztejn A., Chabert G.** On the approximation of linear AE-solution sets. Proceedings of the 12th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics SCAN 2006, Duisburg, Germany, September 26–29, 2006. IEEE; 2006: 18. DOI:10.1109/SCAN.2006.33.
15. **Popova E.** Explicit description of AE-solution sets for parametric linear systems. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2012; 33(4):1172–1189. DOI:10.1137/120870359.

16. **Rohn J.** A handbook of results on interval linear problems. Electronic book. Prague: Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic; 2012. Available at: `http://www.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ILinProblems.pdf`
17. **Hladík M.** AE-solutions and AE-solvability to general interval linear systems. Linear Algebra and its Applications. 2015; (465):221–238. DOI:10.1016/j.laa.2014.09.030.
18. **Shary S.P.** Solving the linear interval tolerance problem. Mathematics and Computers in Simulation. 1995; (39):53–85.
19. **Shary S.P.** An interval linear tolerance problem. Automation and Remote Control. 2004; (65):1653–1666 DOI:10.1023/B:AURC.0000044274.25098.da.
20. **Shary S.P., Sharaya I.A.** Recognizing solvability of interval equations and its application to data analysis. Computational Technologies. 2013; 18(3):80–109. (In Russ.)
21. **Shary S.P., Sharaya I.A.** On solvability recognition for interval linear systems of equations. Optimization Letters. 2015; 10(2):247–260. DOI:10.1007/s11590-015-0891-6.
22. **Shary S.P.** Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty. Journal of Global Optimization. 2016; 66(1):111–126. DOI:10.1007/s10898-015-0340-1.
23. **Shary S.P.** New characterizations for the solution set to interval linear systems of equations. Applied Mathematics and Computation. 2015; (265):570–573. DOI:10.1016/j.amc.2015.05.029.
24. **Noskov S.I., Lakeyev A.V.** RS-solutions and quasisolutions to interval system of linear algebraic equations. Vestnik of Saint-Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. 2021; 17(3). — in press. (In Russ.)
25. **Beeck H.** Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten. Computing. 1972; 10(3):231–244. DOI:10.1007/BF02316910.
26. **Rockafellar R.T.** Convex analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press; 1970: 472.
27. **Shary S.P.** A new method for inner estimation of solution sets to interval linear systems. Modelling, Design, and Simulation of Systems with Uncertainties. Mathematical Engineering. 2011; (3):21–42. DOI:10.1007/978-3-642-15956-5_2.
28. **Shary S.P.** Weak and strong compatibility in data fitting problems under interval uncertainty. Advances in Data Science and Adaptive Analysis. 2020; 12(1):2050002. DOI:10.1142/S2424922X20500023.